

Über die
freie und eine bestimmte unfreie Bewegung eines Systems
materieller Punkte, zwischen denen den Massen und der Ent-
fernung proportionale anziehende Kräfte wirken.

Inaugural-Dissertation

zur

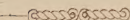
Erlangung der Doctorwürde

bei

der hochlöblichen philosophischen Facultät zu Marburg

eingereicht von

Hermann Pfaff.



MARBURG.

C. L. Pfeil'sche Universitäts-Buchdruckerei.

1887.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554034_0066

Die Verallgemeinerung des Problems der Planetenbewegung führt zu der Aufgabe: die Bewegung eines Systems materieller Punkte zu untersuchen, zwischen denen den Massen proportionale Kräfte als Funktionen der gegenseitigen Entfernung der Punkte wirken.

Das d'Alembert'sche Prinzip ergibt für die Bewegung eines solchen Systems folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= - \varrho m \sum m_{\kappa} \frac{f(r_{\kappa})}{r_{\kappa}} (x - x_{\kappa}); \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= - \varrho m \sum m_{\kappa} \frac{f(r_{\kappa})}{r_{\kappa}} (y - y_{\kappa}); \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= - \varrho m \sum m_{\kappa} \frac{f(r_{\kappa})}{r_{\kappa}} (z - z_{\kappa}). \end{aligned}$$

Hierin bedeuten $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 \dots x_{\kappa}, y_{\kappa}, z_{\kappa} \dots$ die Koordinaten der einzelnen Punkte zur Zeit t , $m_1, m_2 \dots m_{\kappa} \dots$ ihre Massen, x, y, z die Koordinaten eines beliebigen dieser Massenpunkte, für welchen der Einfachheit und Allgemeinheit wegen der betreffende Index fortgelassen ist; $r_1, r_2 \dots r_{\kappa} \dots$ sind die Entfernungen dieser Masse von den einzelnen Punkten zur Zeit t , ϱ die Grösse der Anziehungskraft zwischen zwei um die Längeneinheit von einander entfernten Masseneinheiten; $f(r_{\kappa})$ drückt die Art der Abhängigkeit der anziehenden Kraft von der Entfernung der Punkte aus, das Zeichen Σ bedeutet, dass die auf dasselbe folgenden Grössen für sämtliche Punkte des Systems zu addieren sind.

Obige Gleichungen gestatten nun zwar die Ableitung einiger allgemeinen Gesetze der Bewegung des Systems, aber sie führen keineswegs zu einer Lösung des Problems. Diese scheitert vielmehr — wie die des Problems der Planetenbewegung, für welche $f(r_{\kappa}) = \frac{1}{r_{\kappa}^2}$ ist, und wie die fast aller übrigen in ihm enthaltenen Specialprobleme — an der Unausführbarkeit der Trennung der Variabeln in den Differentialgleichungen.

Man erkennt jedoch schon nach oberflächlicher Prüfung der letzteren, dass diese Schwierigkeit fortfällt in dem Falle, dass $f(r_{\kappa}) = r_{\kappa}$, d. h. dass die zwischen den Punkten wirkenden anziehenden Kräfte den Entfernungen derselben proportional sind. In der That lässt dieser specielle Fall des Problems eine vollständige und einfache Lösung zu, die sich natürlich wesentlich komplizierter gestaltet, wenn die Punkte nicht vollständig frei beweglich sind. Ich habe,

veranlasst durch Herrn Professor Dedekind in Braunschweig, zunächst die freie Bewegung des Punktsystems und dann wegen einiger nicht uninteressanter Beziehungen zur Theorie der Flächen zweiter Ordnung den Fall der unfreien Bewegung untersucht, dass jeder Punkt auf einer bestimmten Ebene sich zu bewegen gezwungen ist.

I. Die freie Bewegung des Systems.

Die Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes m lauten:

$$(1) \quad \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= - \varrho m \sum m_{\kappa} (x - x_{\kappa}); \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= - \varrho m \sum m_{\kappa} (y - y_{\kappa}); \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= - \varrho m \sum m_{\kappa} (z - z_{\kappa}). \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Koordinaten des Schwerpunkts des Systems mit α, β, γ , die vom Schwerpunkt aus gezählten, den ursprünglichen parallelen Koordinaten der Massenpunkte mit $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2 \dots \xi_{\kappa}, \eta_{\kappa}, \zeta_{\kappa} \dots$, die des Punktes m mit ξ, η, ζ , so ist

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \xi, \quad y = \beta + \eta, \quad z = \gamma + \zeta; \\ \sum m_{\kappa} (x - x_{\kappa}) &= \sum m_{\kappa} (\xi - \xi_{\kappa}) = \xi \sum m_{\kappa} - \sum m_{\kappa} \xi_{\kappa}; \\ \sum m_{\kappa} (y - y_{\kappa}) &= \sum m_{\kappa} (\eta - \eta_{\kappa}) = \eta \sum m_{\kappa} - \sum m_{\kappa} \eta_{\kappa}; \\ \sum m_{\kappa} (z - z_{\kappa}) &= \sum m_{\kappa} (\zeta - \zeta_{\kappa}) = \zeta \sum m_{\kappa} - \sum m_{\kappa} \zeta_{\kappa}. \end{aligned}$$

Da nach den Gesetzen des Schwerpunkts

$$\sum m_{\kappa} \xi_{\kappa} = \sum m_{\kappa} \eta_{\kappa} = \sum m_{\kappa} \zeta_{\kappa} = 0$$

ist, so folgt, wenn M die Gesamtmasse des Systems ist,

$$\begin{aligned} \sum m_{\kappa} (x - x_{\kappa}) &= M\xi; \\ \sum m_{\kappa} (y - y_{\kappa}) &= M\eta; \\ \sum m_{\kappa} (z - z_{\kappa}) &= M\zeta. \end{aligned}$$

Hiernach gehen die Gleichungen (1) über in:

$$(2) \quad \begin{aligned} m \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + m \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= - \varrho m M \xi; \\ m \frac{d^2 \beta}{dt^2} + m \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= - \varrho m M \eta; \\ m \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= - \varrho m M \zeta. \end{aligned}$$

Bildet man die erste dieser Gleichungen für sämtliche Massenpunkte des Systems, addiert die so erhaltenen Gleichungen und verfährt mit der zweiten und dritten in derselben Weise, so erhält man, da auch

$$\sum m_{\mathbf{x}} \frac{d^2 \xi_{\mathbf{x}}}{dt^2} = \sum m_{\mathbf{x}} \frac{d^2 \eta_{\mathbf{x}}}{dt^2} = \sum m_{\mathbf{x}} \frac{d^2 \zeta_{\mathbf{x}}}{dt^2} = 0$$

ist,

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 \beta}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = 0.$$

Durch Integration ergibt sich, wenn zur Zeit $t = 0$ die Koordinaten des Schwerpunkts $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ und seine Geschwindigkeitskomponenten $(\frac{d\alpha}{dt})_0, (\frac{d\beta}{dt})_0, (\frac{d\gamma}{dt})_0$ sind:

$$\alpha = \alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 t;$$

$$\beta = \beta_0 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0 t;$$

$$\gamma = \gamma_0 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_0 t.$$

Der Schwerpunkt bewegt sich also, dem Prinzip der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung entsprechend, geradlinig mit constanter Geschwindigkeit durch den Raum.

Als Differentialgleichungen der relativen Bewegung des Punktes m in Bezug auf den Schwerpunkt erhält man aus (2) hiernach:

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - qmM\xi;$$

$$m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = - qmM\eta;$$

$$m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = - qmM\zeta.$$

Diese Gleichungen sprechen den Satz aus, dass die Bewegung des Systems eine centrale ist, d. h. dass jeder der materiellen Punkte sich so bewegt, wie er sich bewegen würde, wenn die Gesamtmasse des Systems im fest gedachten Schwerpunkt vereinigt wäre und nach dem zu Grunde liegenden Anziehungsgesetz auf ihn wirkte.

Die Integration dieser Gleichungen ergibt, wenn zur Abkürzung

$$qM = \omega^2$$

gesetzt wird und der Zustand der relativen Bewegung des Punktes m in Bezug auf den Schwerpunkt zur Zeit $t = 0$ durch die Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 und die Komponenten seiner Anfangsgeschwindigkeit $(\frac{d\xi}{dt})_0, (\frac{d\eta}{dt})_0, (\frac{d\zeta}{dt})_0$ bestimmt wird,

$$\begin{aligned}
 \xi &= \xi_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)_0 \sin \omega t; \\
 \eta &= \eta_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(\frac{d\eta}{dt} \right)_0 \sin \omega t; \\
 \zeta &= \zeta_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)_0 \sin \omega t.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Die relative Bahn der Masse m und die Art ihrer Bewegung auf derselben lässt sich hieraus leicht ableiten. Die durch Elimination von t sich ergebende Gleichung

$$\begin{vmatrix} \xi \left(\frac{d\xi}{dt} \right)_0 & \xi_0 \\ \eta \left(\frac{d\eta}{dt} \right)_0 & \eta_0 \\ \zeta \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)_0 & \zeta_0 \end{vmatrix} = 0
 \tag{4}$$

zeigt, dass die relative Bewegung in einer den Schwerpunkt enthaltenden Ebene stattfindet. Die beiden ersten Gleichungen führen ferner mit Hilfe der Formel

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

zu der die Projektion der relativen Bahn auf die $\xi\eta$ Ebene repräsentierenden Gleichung

$$\begin{aligned}
 &\xi^2 \left(\omega^2 \eta_0^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)_0^2 \right) + \eta^2 \left(\omega^2 \xi_0^2 + \left(\frac{d\xi}{dt} \right)_0^2 \right) + 2\xi\eta \left(\omega^2 \xi_0 \eta_0 + \left(\frac{d\xi}{dt} \right)_0 \left(\frac{d\eta}{dt} \right)_0 \right) \\
 &= \left(\eta_0 \left(\frac{d\xi}{dt} \right)_0 - \xi_0 \left(\frac{d\eta}{dt} \right)_0 \right)^2,
 \end{aligned}$$

in der man die einer Ellipse erkennt, deren Mittelpunkt im Schwerpunkt liegt. Da der zugehörige Projektionscylinder von der Ebene (4) nur in einer Ellipse geschnitten werden kann, so folgt, dass die Punkte des Systems um den Schwerpunkt als Mittelpunkt elliptische Schwingungen ausführen.

Die relative Geschwindigkeit v der Masse m lässt sich als eine sehr einfache Funktion ihrer Entfernung r vom Schwerpunkt darstellen. Unter Berücksichtigung der Relationen

$$\begin{aligned}
 r^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2; \\
 v^2 &= \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2; \\
 \xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} + \zeta \frac{d\zeta}{dt} &= r \frac{dr}{dt}
 \end{aligned}$$

leitet man nämlich, wenn die Anfangswerte der Grössen v , r , $\frac{dr}{dt}$ beziehungsweise v_0 , r_0 , $\left(\frac{dr}{dt} \right)_0$ sind, aus (3) die Gleichungen

$$(5) \quad \begin{aligned} \omega^2 r^2 &= \omega^2 r_0^2 \cos^2 \omega t + v_0^2 \sin^2 \omega t + \omega r_0 \left(\frac{dr}{dt} \right)_0 \sin 2\omega t; \\ v^2 &= \omega^2 r_0^2 \sin^2 \omega t + v_0^2 \cos^2 \omega t - \omega r_0 \left(\frac{dr}{dt} \right)_0 \sin 2\omega t \end{aligned}$$

ab, deren Addition

$$(6) \quad \begin{aligned} \omega^2 r^2 + v^2 &= \omega^2 r_0^2 + v_0^2 = \text{const.}, \\ \text{also } v &= \sqrt{v_0^2 - \omega^2(r^2 - r_0^2)} \end{aligned}$$

ergibt.

Die Zeitpunkte t_n , in denen m die Scheitel der Ellipse durchläuft, findet man durch Auflösung der Gleichung

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\omega^2 r} \left\{ 2\omega r_0 \left(\frac{dr}{dt} \right)_0 \cos 2\omega t - (\omega^2 r_0^2 - v_0^2) \sin 2\omega t \right\} = 0$$

nach t ; es ist

$$t_n = \frac{\pi}{2\omega} n + \arctang \left\{ \frac{2\omega r_0 \left(\frac{dr}{dt} \right)_0}{\omega^2 r_0^2 - v_0^2} \right\}.$$

Man ersieht hieraus, dass der Ellipsenquadrant in der Zeit $\frac{\pi}{2\omega}$, die ganze Ellipse daher in der Zeit

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

durchlaufen wird. Die Zeitdauer eines Ellipsenumlaufs ist demnach für alle Punkte des Systems dieselbe, und zwar ist das Quadrat derselben der Masse des Systems umgekehrt proportional.

Berechnet man nach (5) die zu t_n gehörigen Werte des Radiusvektors r , so erhält man die Länge der beiden Halbachsen a und b der Ellipse; man findet nach gehöriger Reduktion:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{\omega^2 r_0^2 + v_0^2 + w^2}{2\omega^2}}, \\ b &= \sqrt{\frac{\omega^2 r_0^2 + v_0^2 - w^2}{2\omega^2}}, \end{aligned}$$

worin zur Abkürzung

$$\sqrt{(\omega^2 r_0^2 - v_0^2)^2 + 4\omega^2 r_0^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)_0^2} = w^2$$

gesetzt ist. Sind nun r_1 und r_2 zwei konjugierte Halbmesser der Ellipse und v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten der Masse m in den zugehörigen Ellipsenpunkten, so ist, da bekanntlich

$$r_1^2 + r_2^2 = a^2 + b^2,$$

vermöge der für a und b gefundenen Werte, sowie der Gleichung (6):

$$\begin{aligned} \omega^2 r_1^2 + \omega^2 r_2^2 &= \omega^2 r_0^2 + v_0^2, \\ \omega^2 r_1^2 + v_1^2 &= \omega^2 r_0^2 + v_0^2, \\ \omega^2 r_2^2 + v_2^2 &= \omega^2 r_0^2 + v_0^2; \end{aligned}$$

daher: $v_1 = \omega r_2$, $v_2 = \omega r_1$,

d. h. die relative Geschwindigkeit der Masse m in einem beliebigen Punkte ihrer Bahn ist dem zugehörigen konjugierten Halbmesser proportional. Sie durchläuft also die beiden zur kleinen Achse gehörigen Ellipsenscheitel mit ihrer grössten Geschwindigkeit ωa , die beiden andern mit ihrer kleinsten ωb .

Aus den gewonnenen Resultaten ergibt sich noch leicht, dass die relative Bewegung der Punkte für $(\frac{dr}{dt})_0 = v_0$ eine geradlinige Schwingung, für $v_0 = \omega r_0$ und $(\frac{dr}{dt})_0 = 0$ eine Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit wird.

Man erhält die Gleichungen der absoluten Bewegung des Punktes m im Raume, wenn man die seiner relativen Bewegung und die der Schwerpunktsbewegung beziehungsweise addiert. Sie lauten:

$$(7) \quad \begin{aligned} x &= \alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 t + \xi_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 \sin \omega t; \\ y &= \beta_0 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0 t + \eta_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0 \sin \omega t; \\ z &= \gamma_0 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_0 t + \zeta_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Will man die Konstanten dieser Gleichungen — als nicht von vorn herein bekannt — durch die den absoluten Bewegungszustand der einzelnen Punkte zur Zeit $t = 0$ bestimmenden Grössen $(x_\times)_0$, $(y_\times)_0$, $(z_\times)_0$; $(\frac{dx_\times}{dt})_0$, $(\frac{dy_\times}{dt})_0$, $(\frac{dz_\times}{dt})_0$ ausdrücken, so hat man folgende aus der Definition des Schwerpunkts sich ergebenden Gleichungen zu verwenden:

$$(8) \quad \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\sum m_\times (x_\times)_0}{M}; \quad \beta_0 = \frac{\sum m_\times (y_\times)_0}{M}; \quad \gamma_0 = \frac{\sum m_\times (z_\times)_0}{M}. \\ \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 &= \frac{\sum m_\times \left(\frac{dx_\times}{dt}\right)_0}{M}; \quad \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0 = \frac{\sum m_\times \left(\frac{dy_\times}{dt}\right)_0}{M}; \quad \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_0 = \frac{\sum m_\times \left(\frac{dz_\times}{dt}\right)_0}{M}. \end{aligned}$$

$$\xi_0 = x_0 - \alpha_0; \quad \eta_0 = y_0 - \beta_0; \quad \zeta_0 = z_0 - \gamma_0.$$

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0; \quad \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 - \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0; \quad \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 - \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_0.$$

Die Gestalt der absoluten Bahn des Punktes m ergibt sich, wenn man sich die Ellipse, in der seine relative Bewegung stattfindet, längs der geradlinigen Bahn des Schwerpunkts mit demselben fortbewegt denkt. Die Ellipse beschreibt dann eine elliptische Cylinderfläche, der Punkt m auf ihr eine gleichmässig gewundene Schraubenlinie. Die Höhe des Schraubengangs ist für alle Punkte des Systems dieselbe und zwar gleich dem Wege, den der Schwerpunkt in der Umlaufszeit zurücklegt.

Als Gleichung der Cylinderfläche findet man aus (7) durch Elimination von t , wenn man durch die Substitution

$$x = \alpha_0 + x'; \quad y = \beta_0 + y'; \quad z = \gamma_0 + z'$$

den Koordinatenanfang in die Anfangslage des Schwerpunkts verlegt, folgende:

$$\left| \begin{matrix} x' & (\frac{d\xi}{dt})_0 & (\frac{d\alpha}{dt})_0 \\ y' & (\frac{d\eta}{dt})_0 & (\frac{d\beta}{dt})_0 \\ z' & (\frac{d\zeta}{dt})_0 & (\frac{d\gamma}{dt})_0 \end{matrix} \right|^2 + \omega^2 \left| \begin{matrix} x' & \xi_0 & (\frac{d\alpha}{dt})_0 \\ y' & \eta_0 & (\frac{d\beta}{dt})_0 \\ z' & \zeta_0 & (\frac{d\gamma}{dt})_0 \end{matrix} \right|^2 = \left| \begin{matrix} \xi_0 & (\frac{d\alpha}{dt})_0 & (\frac{d\xi}{dt})_0 \\ \eta_0 & (\frac{d\beta}{dt})_0 & (\frac{d\eta}{dt})_0 \\ \zeta_0 & (\frac{d\gamma}{dt})_0 & (\frac{d\zeta}{dt})_0 \end{matrix} \right|^2$$

Dieselbe zerfällt für

$$\left| \begin{matrix} \xi_0 & (\frac{d\alpha}{dt})_0 & (\frac{d\xi}{dt})_0 \\ \eta_0 & (\frac{d\beta}{dt})_0 & (\frac{d\eta}{dt})_0 \\ \zeta_0 & (\frac{d\gamma}{dt})_0 & (\frac{d\zeta}{dt})_0 \end{matrix} \right| = 0$$

in die beiden Gleichungen

$$\left| \begin{matrix} x' & (\frac{d\xi}{dt})_0 & (\frac{d\alpha}{dt})_0 \\ y' & (\frac{d\eta}{dt})_0 & (\frac{d\beta}{dt})_0 \\ z' & (\frac{d\zeta}{dt})_0 & (\frac{d\gamma}{dt})_0 \end{matrix} \right| = 0, \quad \left| \begin{matrix} x' & \xi_0 & (\frac{d\alpha}{dt})_0 \\ y' & \eta_0 & (\frac{d\beta}{dt})_0 \\ z' & \zeta_0 & (\frac{d\gamma}{dt})_0 \end{matrix} \right| = 0,$$

die jedoch, wie sich mit Hilfe der vorstehenden Bedingungsgleichung nachweisen lässt, beide die Ebene (4) repräsentieren, so dass in diesem Fall nicht nur die relative, sondern auch die absolute Bewegung des Punktes m in derselben stattfindet. Seine Bahn ist dann eine ebene, elliptische Wellenlinie, bei welcher die Wellenlänge der Höhe des Schraubengangs bei der nicht ebenen Bewegung entspricht.

II. Die unfreie Bewegung.

Die Gleichungen der den einzelnen Massenpunkten angewiesenen Ebenen seien:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E_1)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E_2)$$

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

$$A_{\kappa} x + B_{\kappa} y + C_{\kappa} z = D_{\kappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E_{\kappa}),$$

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

die der Ebene des beliebigen Massenpunktes m :

$$Ax + By + Cz = D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E).$$

Ist $\mathbf{II}$ der von m zur Zeit t auf die Ebene E ausgeübte — normal gegen dieselbe gerichtete — Druck, so sind die in Richtung der Koordinatenachsen genommenen Komponenten des von der Ebene geleisteten Widerstandes, wenn zur Abkürzung

$$A^2 + B^2 + C^2 = Q^2$$

gesetzt wird, beziehungsweise:

$$-\frac{A}{Q} \Pi, -\frac{B}{Q} \Pi, -\frac{C}{Q} \Pi.$$

Nach bekannten dynamischen Gesetzen lauten daher mit Anschluss an (2) die Bewegungsgleichungen des Punktes m :

$$(9) \quad \begin{aligned} m \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + m \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= -\varrho m M \xi - \frac{A}{Q} \Pi, \\ m \frac{d^2 \beta}{dt^2} + m \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= -\varrho m M \eta - \frac{B}{Q} \Pi, \\ m \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= -\varrho m M \zeta - \frac{C}{Q} \Pi. \end{aligned}$$

Multipliziert man zur näheren Bestimmung von Π diese Gleichungen beziehungsweise mit A, B, C und addiert sie, so verschwindet in der dann sich ergebenden Gleichung zufolge der Gleichung der Ebene E die linke Seite, und man erhält:

$$\varrho m M (A \xi + B \eta + C \zeta) + Q \Pi = 0,$$

mithin, da

$$\begin{aligned} A \xi + B \eta + C \zeta &= D - A \alpha - B \beta - C \gamma, \\ \Pi &= -\varrho m M \frac{D - A \alpha - B \beta - C \gamma}{Q}. \end{aligned}$$

$\frac{D - A \alpha - B \beta - C \gamma}{Q}$ ist der Ausdruck für die Länge der vom Schwerpunkt auf die Ebene E gefällten Senkrechten. Daher spricht die letzte Gleichung den Satz aus: die Ebene E erleidet von dem Punkte m einen ebenso grossen Druck, als sie erleiden würde, wenn die Gesamtmasse des Systems im Schwerpunkt konzentriert wäre und nach dem allgemeinen Anziehungsgesetz auf m wirkte.

Die Einsetzung des für Π erhaltenen Wertes in die Gleichungen (9) ergibt:

$$(10) \quad \begin{aligned} m \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + m \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= -\varrho m M \xi - \varrho m M \frac{A^2}{Q^2} \alpha - \varrho m M \frac{AB}{Q^2} \beta - \varrho m M \frac{AC}{Q^2} \gamma + \varrho m M \frac{AD}{Q^2}, \\ m \frac{d^2 \beta}{dt^2} + m \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= -\varrho m M \eta - \varrho m M \frac{AB}{Q^2} \alpha - \varrho m M \frac{B^2}{Q^2} \beta - \varrho m M \frac{BC}{Q^2} \gamma + \varrho m M \frac{BD}{Q^2}, \\ m \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= -\varrho m M \zeta - \varrho m M \frac{AC}{Q^2} \alpha - \varrho m M \frac{BC}{Q^2} \beta - \varrho m M \frac{C^2}{Q^2} \gamma + \varrho m M \frac{CD}{Q^2}. \end{aligned}$$

Bildet man die erste dieser Gleichungen für sämtliche Punkte des Systems, addiert die so erhaltenen Gleichungen und wendet dasselbe Verfahren auch auf die zweite und dritte an, so erhält man mit Berücksichtigung bekannter Schwerpunktseigenschaften:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\varrho \alpha \sum m_{\mathbf{x}} \frac{A_{\mathbf{x}}^2}{Q_{\mathbf{x}}^2} - \varrho \beta \sum m_{\mathbf{x}} \frac{A_{\mathbf{x}} B_{\mathbf{x}}}{Q_{\mathbf{x}}^2} - \varrho \gamma \sum m_{\mathbf{x}} \frac{A_{\mathbf{x}} C_{\mathbf{x}}}{Q_{\mathbf{x}}^2} + \varrho \sum m_{\mathbf{x}} \frac{A_{\mathbf{x}} D_{\mathbf{x}}}{Q_{\mathbf{x}}^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\beta}{dt^2} &= -\varrho\alpha \sum m_{\kappa} \frac{A_{\kappa}B_{\kappa}}{Q_{\kappa}^2} - \varrho\beta \sum m_{\kappa} \frac{B_{\kappa}^2}{Q_{\kappa}^2} - \varrho\gamma \sum m_{\kappa} \frac{B_{\kappa}C_{\kappa}}{Q_{\kappa}^2} + \varrho \sum m_{\kappa} \frac{B_{\kappa}D_{\kappa}}{Q_{\kappa}^2}, \\ \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= -\varrho\alpha \sum m_{\kappa} \frac{A_{\kappa}C_{\kappa}}{Q_{\kappa}^2} - \varrho\beta \sum m_{\kappa} \frac{B_{\kappa}C_{\kappa}}{Q_{\kappa}^2} - \varrho\gamma \sum m_{\kappa} \frac{C_{\kappa}^2}{Q_{\kappa}^2} + \varrho \sum m_{\kappa} \frac{C_{\kappa}D_{\kappa}}{Q_{\kappa}^2}.\end{aligned}$$

Dies sind die Differentialgleichungen der Schwerpunktsbewegung. Hat man letztere durch Integration der ersteren bestimmt, d. h. die Schwerpunktskoordinaten als Funktionen der Zeit ausgedrückt, so werden mit deren Hilfe die Gleichungen (10) auch über die Bewegung der einzelnen Punkte des Systems näheren Aufschluss geben.

A. Bewegung des Schwerpunkts.

Die gefundenen Differentialgleichungen lauten, wenn der Einfachheit wegen

$$\begin{aligned}(11) \quad & \sum m_{\kappa} \frac{A_{\kappa}^2}{Q_{\kappa}^2} = C_{11}; \quad \sum m_{\kappa} \frac{B_{\kappa}^2}{Q_{\kappa}^2} = C_{22}; \quad \sum m_{\kappa} \frac{C_{\kappa}^2}{Q_{\kappa}^2} = C_{33} \\ & \sum m_{\kappa} \frac{A_{\kappa}B_{\kappa}}{Q_{\kappa}^2} = C_{12}; \quad \sum m_{\kappa} \frac{A_{\kappa}C_{\kappa}}{Q_{\kappa}^2} = C_{13}; \quad \sum m_{\kappa} \frac{B_{\kappa}C_{\kappa}}{Q_{\kappa}^2} = C_{23} \\ & \sum m_{\kappa} \frac{A_{\kappa}D_{\kappa}}{Q_{\kappa}^2} = C_{14}; \quad \sum m_{\kappa} \frac{B_{\kappa}D_{\kappa}}{Q_{\kappa}^2} = C_{24}; \quad \sum m_{\kappa} \frac{C_{\kappa}D_{\kappa}}{Q_{\kappa}^2} = C_{34}\end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}(12) \quad & \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\varrho C_{11}\alpha - \varrho C_{12}\beta - \varrho C_{13}\gamma + \varrho C_{14}; \\ & \frac{d^2\beta}{dt^2} = -\varrho C_{12}\alpha - \varrho C_{22}\beta - \varrho C_{23}\gamma + \varrho C_{24}; \\ & \frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\varrho C_{13}\alpha - \varrho C_{23}\beta - \varrho C_{33}\gamma + \varrho C_{34}.\end{aligned}$$

Multipliziert man sie beziehungsweise mit den vorläufig unbestimmten konstanten Faktoren λ , μ , ν und addiert sie, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\lambda \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \mu \frac{d^2\beta}{dt^2} + \nu \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= -\varrho(\lambda C_{11} + \mu C_{12} + \nu C_{13})\alpha - \varrho(\lambda C_{12} + \mu C_{22} + \nu C_{23})\beta \\ &\quad - \varrho(\lambda C_{13} + \mu C_{23} + \nu C_{33})\gamma + \varrho(\lambda C_{14} + \mu C_{24} + \nu C_{34}).\end{aligned}$$

Diese Gleichung geht mittels der Substitutionen

$$\begin{aligned}(13) \quad & \lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma = U, \\ & \lambda \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \mu \frac{d^2\beta}{dt^2} + \nu \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{d^2U}{dt^2}, \\ & \left\{ \begin{aligned} \lambda C_{11} + \mu C_{12} + \nu C_{13} &= \lambda \vartheta, \\ \lambda C_{12} + \mu C_{22} + \nu C_{23} &= \mu \vartheta, \\ \lambda C_{13} + \mu C_{23} + \nu C_{33} &= \nu \vartheta, \\ \lambda C_{14} + \mu C_{24} + \nu C_{34} &= d \end{aligned} \right.\end{aligned}$$

über in:

$$\frac{d^2U}{dt^2} = -\varrho \vartheta U + \varrho d.$$

Zunächst sind die Konstanten ϑ , λ , μ , ν zu bestimmen. Bringt man die hierzu zu verwendenden Gleichungen (13) auf die Form

$$(14) \quad \begin{aligned} \lambda(C_{11} - \vartheta) + \mu C_{12} + \nu C_{13} &= 0, \\ \lambda C_{12} + \mu(C_{22} - \vartheta) + \nu C_{23} &= 0, \\ \lambda C_{13} + \mu C_{23} + \nu(C_{33} - \vartheta) &= 0 \end{aligned}$$

und nimmt, um die unbrauchbare Lösung $\lambda = \mu = \nu = 0$ zu umgehen,

$$(15) \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

als die noch nötige vierte Bestimmungsgleichung hinzu, so erhält man, da das System (14) nur dann für die Grössen λ , μ , ν von Null verschiedene Werte ergibt, wenn die Determinante ihrer Koeffizienten verschwindet, hieraus sofort zur Bestimmung von ϑ die kubische Gleichung:

$$(16) \quad \begin{vmatrix} C_{11} - \vartheta & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} - \vartheta & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} - \vartheta \end{vmatrix} = 0.$$

Die Konstanten λ , μ , ν ergeben sich einem aus der Theorie der Flächen zweiter Ordnung bekannten Verfahren gemäss aus den Gleichungen (14) und (15) folgendermassen. Die Division der ersten derselben durch $C_{12}C_{13}$ liefert mit beiderseitiger Addition von $\frac{\lambda}{C_{23}}$:

$$\frac{\lambda}{C_{23}} + \frac{\mu}{C_{13}} + \frac{\nu}{C_{12}} = \frac{\lambda}{C_{12}C_{13}} \left(\vartheta - C_{11} + \frac{C_{12}C_{13}}{C_{23}} \right).$$

Die analoge Behandlung der zweiten und dritten führt zu

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{C_{23}} + \frac{\mu}{C_{13}} + \frac{\nu}{C_{12}} &= \frac{\mu}{C_{12}C_{23}} \left(\vartheta - C_{22} + \frac{C_{12}C_{23}}{C_{13}} \right), \\ \frac{\lambda}{C_{23}} + \frac{\mu}{C_{13}} + \frac{\nu}{C_{12}} &= \frac{\nu}{C_{13}C_{23}} \left(\vartheta - C_{33} + \frac{C_{13}C_{23}}{C_{12}} \right). \end{aligned}$$

Setzt man

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\lambda}{C_{23}} + \frac{\mu}{C_{13}} + \frac{\nu}{C_{12}} &= P, \\ C_{11} - \frac{C_{12}C_{13}}{C_{23}} &= r_1, \\ C_{22} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{13}} &= r_2, \\ C_{33} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{12}} &= r_3, \end{aligned}$$

so lauten die vorstehenden Gleichungen:

$$P = \frac{\lambda(\vartheta - r_1)}{C_{12}C_{13}}; \quad P = \frac{\mu(\vartheta - r_2)}{C_{12}C_{23}}; \quad P = \frac{\nu(\vartheta - r_3)}{C_{13}C_{23}};$$

daher:

$$\lambda = \frac{PC_{12}C_{13}}{\vartheta - r_1}; \quad \mu = \frac{PC_{12}C_{23}}{\vartheta - r_2}; \quad \nu = \frac{PC_{13}C_{23}}{\vartheta - r_3},$$

worin, wie sich mit Hilfe der Gleichung

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

leicht ergibt,

$$P = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{C_{12}C_{13}}{\vartheta - r_1}\right)^2 + \left(\frac{C_{12}C_{23}}{\vartheta - r_2}\right)^2 + \left(\frac{C_{13}C_{23}}{\vartheta - r_3}\right)^2}}$$

zu setzen ist.

Sind nun $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ die Wurzeln der kubischen Gleichung (16) und bezeichnet man die zugehörigen Werte von $P, \lambda, \mu, \nu, d, U$ durch die entsprechenden Indices, so bestehen nach dem Bisherigen die Relationen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{P_1 C_{12} C_{13}}{\vartheta_1 - r_1}; & \mu_1 &= \frac{P_1 C_{12} C_{23}}{\vartheta_1 - r_2}; & \nu_1 &= \frac{P_1 C_{13} C_{23}}{\vartheta_1 - r_3}. \\ \lambda_2 &= \frac{P_2 C_{12} C_{13}}{\vartheta_2 - r_1}; & \mu_2 &= \frac{P_2 C_{12} C_{23}}{\vartheta_2 - r_2}; & \nu_2 &= \frac{P_2 C_{13} C_{23}}{\vartheta_2 - r_3}. \\ \lambda_3 &= \frac{P_3 C_{12} C_{13}}{\vartheta_3 - r_1}; & \mu_3 &= \frac{P_3 C_{12} C_{23}}{\vartheta_3 - r_2}; & \nu_3 &= \frac{P_3 C_{13} C_{23}}{\vartheta_3 - r_3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (18) \quad d_1 &= \lambda_1 C_{14} + \mu_1 C_{24} + \nu_1 C_{34}, \\ d_2 &= \lambda_2 C_{14} + \mu_2 C_{24} + \nu_2 C_{34}, \\ d_3 &= \lambda_3 C_{14} + \mu_3 C_{24} + \nu_3 C_{34}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (19) \quad U_1 &= \lambda_1 \alpha + \mu_1 \beta + \nu_1 \gamma, \\ U_2 &= \lambda_2 \alpha + \mu_2 \beta + \nu_2 \gamma, \\ U_3 &= \lambda_3 \alpha + \mu_3 \beta + \nu_3 \gamma \end{aligned}$$

und die Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} (20) \quad \frac{d^2 U_1}{dt^2} &= -\varrho \vartheta_1 U_1 + \varrho d_1, \\ \frac{d^2 U_2}{dt^2} &= -\varrho \vartheta_2 U_2 + \varrho d_2, \\ \frac{d^2 U_3}{dt^2} &= -\varrho \vartheta_3 U_3 + \varrho d_3. \end{aligned}$$

Der weitere Gang der Rechnung ist von der Beschaffenheit der Wurzeln $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ wesentlich abhängig; es ist also zunächst eine nähere Untersuchung der kubischen Gleichung (16) erforderlich. Dieselbe lässt sich leicht in folgende zur Prüfung ihrer Wurzeln geeignetere Formen überführen:

$$(21a) \quad \vartheta^3 - A_1 \vartheta^2 + A_2 \vartheta - A_3 = 0,$$

$$(21b) \quad \frac{C_{12}C_{13}}{C_{23}(\vartheta - r_1)} + \frac{C_{12}C_{23}}{C_{13}(\vartheta - r_2)} + \frac{C_{13}C_{23}}{C_{12}(\vartheta - r_3)} = 1,$$

worin

$$A_1 = C_{11} + C_{22} + C_{33},$$

$$A_2 = C_{11}C_{22} - C_{12}^2 + C_{11}C_{33} - C_{13}^2 + C_{22}C_{33} - C_{23}^2,$$

$$A_3 = C_{11}C_{22}C_{33} + 2C_{12}C_{13}C_{23} - C_{11}C_{23}^2 - C_{22}C_{13}^2 - C_{33}C_{12}^2$$

zu setzen ist; die Bedeutung der Grössen r_1, r_2, r_3 ist aus (17) bekannt.

Man erkennt, dass die vorliegende Gleichung der Form nach genau mit der bekannten, der Untersuchung der drei Hauptebenen der Flächen zweiter Ordnung zu Grunde liegenden kubischen Gleichung übereinstimmt, die man bei der Discussion der allgemeinen Gleichung jener Flächen aus einem dem System (14) und (15) ganz ähnlichen Gleichungssystem herleitet. Jene Discussion ergibt bekanntlich, dass der Gleichung (21^b) notwendig drei reelle und — vorausgesetzt, dass nicht $r_1 = r_2 = r_3$ ist — von einander verschiedene Wurzeln genügen.

Zur Ermittlung des Vorzeichens derselben sind die Polynome A_1, A_2, A_3 zu untersuchen. Die Substitution der Werte (11) führt nach Entwicklung der Summenprodukte und gehöriger Reduktion der Polynome zu folgenden Resultaten:

$$\begin{aligned} A_1 &= C_{11} + C_{22} + C_{33} = M. \\ b_1 &= C_{11}C_{22} - C_{12}^2 = \sum \frac{m_\alpha m_\beta}{Q_\alpha^2 Q_\beta^2} \left| \begin{array}{cc} A_\alpha & B_\alpha \\ A_\beta & B_\beta \end{array} \right|^2 \\ b_2 &= C_{11}C_{33} - C_{13}^2 = \sum \frac{m_\alpha m_\beta}{Q_\alpha^2 Q_\beta^2} \left| \begin{array}{cc} A_\alpha & C_\alpha \\ A_\beta & C_\beta \end{array} \right|^2 \\ b_3 &= C_{22}C_{33} - C_{23}^2 = \sum \frac{m_\alpha m_\beta}{Q_\alpha^2 Q_\beta^2} \left| \begin{array}{cc} B_\alpha & C_\alpha \\ B_\beta & C_\beta \end{array} \right|^2 \\ (22) \quad A_2 &= \sum \frac{m_\alpha m_\beta}{Q_\alpha^2 Q_\beta^2} \left\{ \left| \begin{array}{cc} A_\alpha & B_\alpha \\ A_\beta & B_\beta \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} A_\alpha & C_\alpha \\ A_\beta & C_\beta \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} B_\alpha & C_\alpha \\ B_\beta & C_\beta \end{array} \right|^2 \right\} \\ A_3 &= \sum \frac{m_\alpha m_\beta m_\gamma}{Q_\alpha^2 Q_\beta^2 Q_\gamma^2} \left| \begin{array}{ccc} A_\alpha & B_\alpha & C_\alpha \\ A_\beta & B_\beta & C_\beta \\ A_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \end{array} \right|^2 \end{aligned}$$

Das Zeichen Σ bedeutet hier, dass die auf dasselbe folgenden Grössen für sämtliche Kombinationsformen zweiter, resp. dritter Klasse der Elemente $m_1, m_2, m_3 \dots$ ohne Wiederholung addiert werden sollen.

Diese Resultate zeigen zunächst, dass die Konstanten A_1, A_2, A_3 und daher — mit Hinsicht auf (21^a) — die nicht verschwindenden Wurzeln der kubischen Gleichung positiv sind. Dieser nicht verschwindenden Wurzeln giebt es jedenfalls eine, da immer $A_1 > 0$ ist. Die weitere Untersuchung hat sich auf die drei Fälle zu erstrecken, dass keine, eine oder zwei der drei Wurzeln verschwinden. Aus (21^a) ersieht man, dass

1. für $A_3 > 0$ keine,
2. für $A_2 > 0, A_3 = 0$ eine,
3. für $A_2 = 0$ zwei

Wurzeln der Null gleich sind. Der Fall $A_2 = 0, A_3 > 0$ ist ausgeschlossen, da den Werten (22) zufolge schon das Verschwinden eines der drei positiven Bestandteile b_1, b_2, b_3 der Konstante A_2 das von A_3 nach sich zieht.

Die Werte (22) gestatten auch die Lage der Ebenen zu bestimmen, die in den beiden speciellen Fällen $A_3 = 0$ und $A_2 = 0$ voranzusetzen ist.

Ist nämlich $A_3 = 0$, so muss für je drei Ebenen $E_\alpha, E_\beta, E_\gamma$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha & C_\alpha \\ A_\beta & B_\beta & C_\beta \\ A_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \end{vmatrix} = 0$$

sein, was nur möglich ist, wenn sämtliche Schnittlinien des Ebenen-Systems einander parallel sind.

A_2 verschwindet nur, wenn für jedes Ebenenpaar E_α, E_β

$$\begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha \\ A_\beta & B_\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_\alpha & C_\alpha \\ A_\beta & C_\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_\alpha & C_\alpha \\ B_\beta & C_\beta \end{vmatrix} = 0$$

ist, d. h. wenn die Proportion

$$A_\alpha : B_\alpha : C_\alpha = A_\beta : B_\beta : C_\beta$$

besteht. In diesem Fall sind sämtliche Ebenen einander parallel.

Wir wenden uns zunächst zur Untersuchung des allgemeinen Falls:

$$1. A_3 > 0.$$

Keine der drei Wurzeln ist gleich Null; das Ebenensystem enthält mindestens einen Schnittpunkt dreier Ebenen.

Es werde zunächst angenommen, dass nicht $r_1 = r_2 = r_3$, d. h. dass die Wurzeln $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, deren Summe gleich M ist, von einander verschieden seien. Die Differentialgleichungen (20) gehen vermöge der Substitutionen

$$(23) \quad U_1 = \frac{d_1}{\vartheta_1} + \alpha'; \quad U_2 = \frac{d_2}{\vartheta_2} + \beta'; \quad U_3 = \frac{d_3}{\vartheta_3} + \gamma';$$

$$\varrho \vartheta_1 = \omega_1^2; \quad \varrho \vartheta_2 = \omega_2^2; \quad \varrho \vartheta_3 = \omega_3^2$$

über in:

$$\frac{d^2 \alpha'}{dt^2} = -\omega_1^2 \alpha',$$

$$\frac{d^2 \beta'}{dt^2} = -\omega_2^2 \beta',$$

$$\frac{d^2 \gamma'}{dt^2} = -\omega_3^2 \gamma'.$$

Durch Integration folgt, wenn $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ die später zu bestimmenden Integrationskonstanten sind,

$$(24) \quad \begin{aligned} \alpha' &= a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t, \\ \beta' &= a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t, \\ \gamma' &= a_3 \cos \omega_3 t + b_3 \sin \omega_3 t. \end{aligned}$$

Die Bedeutung der Grössen α' , β' , γ' ergibt sich mittels der aus (19) und (23) resultierenden Gleichungen

$$(25) \quad \begin{aligned} \alpha' &= -\frac{d_1}{g_1} + \lambda_1\alpha + \mu_1\beta + \nu_1\gamma, \\ \beta' &= -\frac{d_2}{g_2} + \lambda_2\alpha + \mu_2\beta + \nu_2\gamma, \\ \gamma' &= -\frac{d_3}{g_3} + \lambda_3\alpha + \mu_3\beta + \nu_3\gamma, \end{aligned}$$

in denen man unschwer die einer Koordinatentransformation erkennt. Sie vermitteln nämlich den Übergang von einem neuen rechtwinkligen Koordinatensystem zu dem ursprünglichen (α , β , γ) System, wobei man — mit Bezug auf dieses neue System — α' , β' , γ' als die Koordinaten des Schwerpunkts, $-\frac{d_1}{g_1}$, $-\frac{d_2}{g_2}$, $-\frac{d_3}{g_3}$ als die des ursprünglichen Koordinatenanfangs anzusehen und mit bekannter Bezeichnungsweise

$$(26) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \cos(\alpha\alpha') & \mu_1 &= \cos(\beta\alpha') & \nu_1 &= \cos(\gamma\alpha') \\ \lambda_2 &= \cos(\alpha\beta') & \mu_2 &= \cos(\beta\beta') & \nu_2 &= \cos(\gamma\beta') \\ \lambda_3 &= \cos(\alpha\gamma') & \mu_3 &= \cos(\beta\gamma') & \nu_3 &= \cos(\gamma\gamma') \end{aligned}$$

zu setzen hat.

Um dies zu zeigen, hat man die Richtigkeit folgender Relationen nachzuweisen:

$$(27) \quad \begin{aligned} \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 &= 1, \\ \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 &= 1, \\ \lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 &= 1, \\ \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 &= 0, \\ \lambda_1\lambda_3 + \mu_1\mu_3 + \nu_1\nu_3 &= 0, \\ \lambda_2\lambda_3 + \mu_2\mu_3 + \nu_2\nu_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die ersten drei ergeben sich aus der allgemeinen Gleichung

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Zum Beweise der drei letzten dienen die Gleichungen (13), aus denen man folgendes System erhält:

$$(28) \quad \begin{aligned} (a) \quad & \lambda_1 C_{11} + \mu_1 C_{12} + \nu_1 C_{13} = \lambda_1 g_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a_1) \\ & \lambda_1 C_{12} + \mu_1 C_{22} + \nu_1 C_{23} = \mu_1 g_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a_2) \\ & \lambda_1 C_{13} + \mu_1 C_{23} + \nu_1 C_{33} = \nu_1 g_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a_3) \\ (b) \quad & \lambda_2 C_{11} + \mu_2 C_{12} + \nu_2 C_{13} = \lambda_2 g_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b_1) \\ & \lambda_2 C_{12} + \mu_2 C_{22} + \nu_2 C_{23} = \mu_2 g_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b_2) \\ & \lambda_2 C_{13} + \mu_2 C_{23} + \nu_2 C_{33} = \nu_2 g_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b_3) \\ (c) \quad & \lambda_3 C_{11} + \mu_3 C_{12} + \nu_3 C_{13} = \lambda_3 g_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c_1) \\ & \lambda_3 C_{12} + \mu_3 C_{22} + \nu_3 C_{23} = \mu_3 g_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c_2) \\ & \lambda_3 C_{13} + \mu_3 C_{23} + \nu_3 C_{33} = \nu_3 g_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c_3). \end{aligned}$$

Eliminiert man C_{11} aus (a_1) und (b_1) , C_{22} aus (a_2) und (b_2) , C_{33} aus (a_3) und (b_3) , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} C_{12}(\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2) + C_{13}(\lambda_2 \nu_1 - \lambda_1 \nu_2) &= \lambda_1 \lambda_2 (\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2), \\ C_{12}(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) + C_{23}(\mu_2 \nu_1 - \mu_1 \nu_2) &= \mu_1 \mu_2 (\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2), \\ C_{13}(\lambda_1 \nu_2 - \lambda_2 \nu_1) + C_{23}(\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1) &= \nu_1 \nu_2 (\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2). \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen folgt:

$$(\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2)(\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2) = 0,$$

daher, da $\mathfrak{J}_1$ von $\mathfrak{J}_2$ verschieden ist,

$$\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 = 0.$$

Durch ähnliche Kombination der Gleichungen (a) und (c), sowie der Gleichungen (b) und (c) findet man:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_3 + \mu_1 \mu_3 + \nu_1 \nu_3 &= 0, \\ \lambda_2 \lambda_3 + \mu_2 \mu_3 + \nu_2 \nu_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die oben gefundenen Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha' &= a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t & . & . & . & (a) \\ \beta' &= a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t & . & . & . & (b) \\ \gamma' &= a_3 \cos \omega_3 t + b_3 \sin \omega_3 t & . & . & . & (c) \end{aligned}$$

sind somit die auf das sekundäre $(\alpha', \beta', \gamma')$ System bezogenen Gleichungen der Schwerpunktsbewegung. Sie drücken, jede für sich betrachtet, einfache, auf das allgemeine Anziehungsgesetz gegründete Schwingungen der drei Projektionen des Schwerpunkts auf die Koordinatenachsen um den Anfangspunkt aus, wenn man sich nämlich — unter Berücksichtigung der Bedeutung der Grössen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — in letzteren beziehungsweise die Massen $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3$, in die Projektionspunkte eine beliebige Masse verlegt denkt. Der Schwerpunkt führt mithin um den Anfangspunkt eine dreifach zusammengesetzte schwingende Bewegung aus, deren geometrische Deutung, wie leicht ersichtlich, folgende ist:

Bewegen sich gleichzeitig

ein Punkt P_1 auf der α' Achse nach dem Gesetz (a) um den Anfangspunkt,

ein Punkt P_2 parallel der β' Achse nach dem Gesetz (b) um P_1 ,

ein Punkt P_3 parallel der γ' Achse nach dem Gesetz (c) um P_2 ,

so beschreibt P_3 die Bahn des Schwerpunkts.

Mit Hilfe des aus (27) herzuleitenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= 1, \\ \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 &= 1, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1, \\ \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3 &= 0, \\ \lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2 + \lambda_3 \nu_3 &= 0, \\ \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \mu_3 \nu_3 &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

findet man aus (25) folgende den Übergang vom primitiven zum sekundären Koordinatensystem vermittelnden Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned}\alpha &= q_1 + \lambda_1 \alpha' + \lambda_2 \beta' + \lambda_3 \gamma', \\ \beta &= q_2 + \mu_1 \alpha' + \mu_2 \beta' + \mu_3 \gamma', \\ \gamma &= q_3 + \nu_1 \alpha' + \nu_2 \beta' + \nu_3 \gamma',\end{aligned}$$

in welchen die Grössen

$$\begin{aligned}q_1 &= \frac{\lambda_1 d_1}{\mathfrak{g}_1} + \frac{\lambda_2 d_2}{\mathfrak{g}_2} + \frac{\lambda_3 d_3}{\mathfrak{g}_3}, \\ q_2 &= \frac{\mu_1 d_1}{\mathfrak{g}_1} + \frac{\mu_2 d_2}{\mathfrak{g}_2} + \frac{\mu_3 d_3}{\mathfrak{g}_3}, \\ q_3 &= \frac{\nu_1 d_1}{\mathfrak{g}_1} + \frac{\nu_2 d_2}{\mathfrak{g}_2} + \frac{\nu_3 d_3}{\mathfrak{g}_3}\end{aligned}$$

die auf das primitive System bezogenen Koordinaten des Anfangspunkts des sekundären Systems sind. Durch Substitution der Werte (24) ergeben sich — als Endergebnis der Integration der Differentialgleichungen (12) — folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}(30) \quad \alpha &= q_1 + \lambda_1(a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t) + \lambda_2(a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t) + \lambda_3(a_3 \cos \omega_3 t + b_3 \sin \omega_3 t), \\ \beta &= q_2 + \mu_1(a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t) + \mu_2(a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t) + \mu_3(a_3 \cos \omega_3 t + b_3 \sin \omega_3 t), \\ \gamma &= q_3 + \nu_1(a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t) + \nu_2(a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t) + \nu_3(a_3 \cos \omega_3 t + b_3 \sin \omega_3 t).\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten sind die Gleichungen (24) und (25) zu verwenden. Dieselben liefern:

$$\begin{aligned}a_1 &= \alpha'_0 = -\frac{d_1}{\mathfrak{g}_1} + \lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0 + \nu_1 \gamma_0, \\ a_2 &= \beta'_0 = -\frac{d_2}{\mathfrak{g}_2} + \lambda_2 \alpha_0 + \mu_2 \beta_0 + \nu_2 \gamma_0, \\ a_3 &= \gamma'_0 = -\frac{d_3}{\mathfrak{g}_3} + \lambda_3 \alpha_0 + \mu_3 \beta_0 + \nu_3 \gamma_0; \\ b_1 &= \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{d\alpha'}{dt} \right)_0 = \frac{1}{\omega_1} \left(\lambda_1 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_0 + \mu_1 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)_0 + \nu_1 \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_0 \right), \\ b_2 &= \frac{1}{\omega_2} \left(\frac{d\beta'}{dt} \right)_0 = \frac{1}{\omega_2} \left(\lambda_2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_0 + \mu_2 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)_0 + \nu_2 \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_0 \right), \\ b_3 &= \frac{1}{\omega_3} \left(\frac{d\gamma'}{dt} \right)_0 = \frac{1}{\omega_3} \left(\lambda_3 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_0 + \mu_3 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)_0 + \nu_3 \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_0 \right).\end{aligned}$$

Die weitere Reduktion der Konstanten auf die den anfänglichen Bewegungszustand der einzelnen Punkte bestimmenden Grössen enthalten die Gleichungen (8).

Diese Resultate haben keine volle Gültigkeit, wenn

$$r_1 = r_2 = r_3 = r$$

ist. Die kubische Gleichung (21^b) ergibt dann zwei gleiche Wurzeln $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = r$. Für diesen Wurzelwert werden die Gleichungen (14) mit einander identisch und lauten:

$$C_{12}C_{13}\lambda + C_{12}C_{23}\mu + C_{13}C_{23}\nu = 0,$$

sodass man zur Bestimmung der Konstanten $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ nur folgende Gleichungen hat:

$$C_{12}C_{13}\lambda_1 + C_{12}C_{23}\mu_1 + C_{13}C_{23}\nu_1 = 0,$$

$$C_{12}C_{13}\lambda_2 + C_{12}C_{23}\mu_2 + C_{13}C_{23}\nu_2 = 0,$$

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1,$$

$$\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 = 1,$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0.$$

Eine der zu bestimmenden Konstanten bleibt mithin willkürlich. Setzt man, um zur Vereinfachung der Koordinatentransformation die α' Achse des sekundären Systems in die $(\alpha\beta)$ Ebene des primitiven Systems fallen zu lassen,

$$\nu_1 = 0,$$

so ergeben sich für die übrigen Konstanten die Werte:

$$\lambda_1 = \frac{C_{23}}{\sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2}}; \quad \mu_1 = -\frac{C_{13}}{\sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2}};$$

$$\lambda_2 = \frac{C_{13}C_{23}}{w\sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2}}; \quad \mu_2 = \frac{C_{13}C_{23}}{w\sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2}}; \quad \nu_2 = -\frac{C_{12}\sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2}}{w},$$

wenn

$$w = \sqrt{C_{12}^2C_{13}^2 + C_{12}^2C_{23}^2 + C_{13}^2C_{23}^2}$$

gesetzt wird. Der Wurzel

$$\mathcal{G}_3 = r + C_{12}C_{13}C_{23}\left(\frac{1}{C_{12}^2} + \frac{1}{C_{13}^2} + \frac{1}{C_{23}^2}\right)$$

entsprechen die Werte:

$$\lambda_3 = \frac{C_{12}C_{13}}{w}; \quad \mu_3 = \frac{C_{12}C_{23}}{w}; \quad \nu_3 = \frac{C_{13}C_{23}}{w}.$$

Die weitere Rechnung ist der oben ausgeführten vollkommen analog. In den Gleichungen (24) ist $\omega_1 = \omega_2$ zu setzen, wonach dieselben ausdrücken, dass der Schwerpunkt auf der Fläche eines elliptischen Cylinders, dessen Achse die γ' Achse ist, der letzteren parallele geradlinige Schwingungen um einen Punkt ausführt, der sich auf der Schnittellipse der $(\alpha' \beta')$ Ebene fortbewegt.

Sind alle drei Wurzeln einander gleich, so muss auch $\mathcal{G}_3 = r$, mithin der Ausdruck

$$C_{12}C_{13}C_{23}\left(\frac{1}{C_{12}^2} + \frac{1}{C_{13}^2} + \frac{1}{C_{23}^2}\right) = 0$$

sein. Dies ist nur möglich, wenn

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0,$$

daher

$$r = C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{M}{3}$$

ist. Die Differentialgleichungen (12) der Schwerpunktsbewegung vereinfachen sich hiernach zu:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{\varrho M}{3}\alpha + \varrho C_{14},$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{\varrho M}{3}\beta + \varrho C_{24},$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{\varrho M}{3}\gamma + \varrho C_{34}.$$

Durch Integration ergibt sich unmittelbar, wenn wieder

$$\varrho M = \omega^2$$

gesetzt wird,

$$(31) \quad \begin{aligned} \alpha &= q_1 + a_1 \cos \frac{\omega}{\sqrt{3}} t + b_1 \sin \frac{\omega}{\sqrt{3}} t, \\ \beta &= q_2 + a_2 \cos \frac{\omega}{\sqrt{3}} t + b_2 \sin \frac{\omega}{\sqrt{3}} t, \\ \gamma &= q_3 + a_3 \cos \frac{\omega}{\sqrt{3}} t + b_3 \sin \frac{\omega}{\sqrt{3}} t \end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{3C_{14}}{M} & q_2 &= \frac{3C_{24}}{M} & q_3 &= \frac{3C_{34}}{M}, \\ a_1 &= \alpha_0 - q_1 & a_2 &= \beta_0 - q_2 & a_3 &= \gamma_0 - q_3, \\ b_1 &= \frac{\sqrt{3}}{\omega} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_0 & b_2 &= \frac{\sqrt{3}}{\omega} \left(\frac{d\beta}{dt} \right)_0 & b_3 &= \frac{\sqrt{3}}{\omega} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_0 \end{aligned}$$

ist. Der Schwerpunkt bewegt sich also in einer Ellipse um den durch die Koordinaten q_1, q_2, q_3 bestimmten Punkt.

$$2. A_2 > 0, A_3 = 0.$$

Eine der Wurzeln ($\mathcal{J}_1$) ist gleich Null; sämtliche Durchschnittslinien des Ebenen-Systems sind einander parallel.

Für die der verschwindenden Wurzel $\mathcal{J}_1$ entsprechenden Konstanten λ_1, μ_1, ν_1 ergeben sich nach einiger Reduktion die Werte:

$$\lambda_1 = \frac{C_{22}C_{33} - C_{23}^2}{w}; \quad \mu_1 = \frac{C_{13}C_{23} - C_{12}C_{33}}{w}; \quad \nu_1 = \frac{C_{12}C_{23} - C_{13}C_{22}}{w},$$

wenn

$$w = \sqrt{(C_{22}C_{33} - C_{23}^2)^2 + (C_{13}C_{23} - C_{12}C_{33})^2 + (C_{12}C_{23} - C_{13}C_{22})^2}$$

ist. Daher ist nach (18)

$$d_1 = C_{14}\lambda_1 + C_{24}\mu_1 + C_{34}\nu_1 = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} C_{14} & C_{12} & C_{13} \\ C_{24} & C_{22} & C_{23} \\ C_{34} & C_{23} & C_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{w} B_1.$$

Durch Substitution der Werte (11) erhält man nach ausführlicher Entwicklung:

$$B_1 = \sum \frac{m_\alpha m_\beta m_\gamma}{Q^2_\alpha Q^2_\beta Q^2_\gamma} \begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha & C_\alpha \\ A_\beta & B_\beta & C_\beta \\ A_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} D_\alpha & B_\alpha & C_\alpha \\ D_\beta & B_\beta & C_\beta \\ D_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \end{vmatrix}.$$

Man ersieht hieraus, dass B_1 mit A_3 verschwindet; es ist also

$$d_1 = 0;$$

daher lautet die erste der Differentialgleichungen (20):

$$\frac{d^2 U_1}{dt^2} = 0,$$

folglich

$$U_1 = a_1 + b_1 t,$$

worin, aus (19) folgend,

$$a_1 = \lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0 + \nu_1 \gamma_0,$$

$$b_1 = \lambda_1 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_0 + \mu_1 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)_0 + \nu_1 \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_0$$

zu setzen ist. Die auf das sekundäre System bezogenen Bewegungsgleichungen des Schwerpunkts lauten mithin, wenn

$$\alpha_1 = \alpha'$$

gesetzt wird,

$$\alpha' = a_1 + b_1 t,$$

$$\beta' = a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t,$$

$$\gamma' = a_3 \cos \omega_3 t + b_3 \sin \omega_3 t.$$

Sie lehren, dass der Schwerpunkt um einen auf der α' Achse mit konstanter Geschwindigkeit b_1 sich fortbewegenden Punkt in einer durch denselben senkrecht zur Achse gelegten Ebene Schwingungen ausführt, die für $\vartheta_2 = \vartheta_3$ elliptisch werden.

Die Reduktion auf das primitive System ergibt:

$$(32) \quad \begin{aligned} \alpha &= q'_1 + \lambda_2(a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t) + \lambda_3(a_3 \cos \omega_3 t + b_3 \sin \omega_3 t), \\ \beta &= q'_2 + \mu_2(a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t) + \mu_3(a_3 \cos \omega_3 t + b_3 \sin \omega_3 t), \\ \gamma &= q'_3 + \nu_2(a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t) + \nu_3(a_3 \cos \omega_3 t + b_3 \sin \omega_3 t), \end{aligned}$$

worin die veränderlichen Grössen

$$q'_1 = \lambda_1 a_1 + \frac{\lambda_2 d_2}{\vartheta_2} + \frac{\lambda_3 d_3}{\vartheta_3} + \lambda_1 b_1 t,$$

$$q'_2 = \mu_1 a_1 + \frac{\mu_2 d_2}{\vartheta_2} + \frac{\mu_3 d_3}{\vartheta_3} + \mu_1 b_1 t,$$

$$q'_3 = \nu_1 a_1 + \frac{\nu_2 d_2}{\vartheta_2} + \frac{\nu_3 d_3}{\vartheta_3} + \nu_1 b_1 t$$

die Koordinaten des auf der α' Achse fortschreitenden Mittelpunkts der Bewegung sind.

3. $A_2 = 0$.

Zwei Wurzeln der kubischen Gleichung sind gleich Null; sämtliche Ebenen sind einander parallel.

Die Gleichungen der Ebenen lassen sich auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz &= n_1 D & . & . & . & (E_1) \\ Ax + By + Cz &= n_2 D & . & . & . & (E_2) \\ \text{---} & \text{---} & & & & \\ Ax + By + Cz &= n_\kappa D & . & . & . & (E_\kappa), \\ \text{---} & \text{---} & & & & \end{aligned}$$

worin $n_1, n_2 \dots n_\kappa$ konstante Zahlen sind. Man findet dann sofort:

$$\begin{aligned} (33) \quad C_{11} &= M \frac{A^2}{Q^2} & C_{22} &= M \frac{B^2}{Q^2} & C_{33} &= M \frac{C^2}{Q^2}, \\ C_{12} &= M \frac{AB}{Q^2} & C_{13} &= M \frac{AC}{Q^2} & C_{23} &= M \frac{BC}{Q^2}, \\ C_{14} &= \frac{AD}{Q^2} \sum m_\kappa n_\kappa; & C_{24} &= \frac{BD}{Q^2} \sum m_\kappa n_\kappa; & C_{34} &= \frac{CD}{Q^2} \sum m_\kappa n_\kappa. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen der Schwerpunktsbewegung gehen hiernach über in:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= -\varrho M \frac{A}{Q^2} (A\alpha + B\beta + C\gamma) + \varrho \frac{AD}{Q^2} \sum m_\kappa n_\kappa, \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} &= -\varrho M \frac{B}{Q^2} (A\alpha + B\beta + C\gamma) + \varrho \frac{BD}{Q^2} \sum m_\kappa n_\kappa, \\ \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= -\varrho M \frac{C}{Q^2} (A\alpha + B\beta + C\gamma) + \varrho \frac{CD}{Q^2} \sum m_\kappa n_\kappa. \end{aligned}$$

Substituiert man für α, β, γ die Werte

$$\frac{\sum m_\kappa x_\kappa}{M}, \quad \frac{\sum m_\kappa y_\kappa}{M}, \quad \frac{\sum m_\kappa z_\kappa}{M}$$

und berücksichtigt, dass die Koordinaten $x_\kappa, y_\kappa, z_\kappa$ den Gleichungen der Ebenen E_κ genügen müssen, so ergibt sich die Relation:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = \frac{D \sum m_\kappa n_\kappa}{M},$$

welche zeigt, dass die Bewegung des Schwerpunkts in einer den Ebenen E_κ parallelen Ebene stattfindet. Mit Hilfe dieser Relation findet man — ohne Benutzung der kubischen Gleichung — für die Schwerpunktsbewegung die Gleichungen

$$\begin{aligned} (34) \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= 0 & \frac{d^2\beta}{dt^2} &= 0 & \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= 0, \\ \alpha &= \alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 t & \beta &= \beta_0 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0 t & \gamma &= \gamma_0 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_0 t, \end{aligned}$$

denen zufolge sich der Schwerpunkt in jener Ebene geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt.

Der wesentliche Unterschied der Bewegungen des Punktsystems in den drei Hauptfällen ist nach dem Bisherigen kurz folgender:

Die Bewegung des Schwerpunkts findet im Allgemeinen, d. h. wenn $A_3 > 0$ ist, um einen festen Punkt, den Anfangspunkt des sekundären Koordinatensystems, statt. Dieser Punkt ist demnach als das Centrum der Bewegung des ganzen Punktsystems anzusehen. Ist dagegen $A_3 = 0$, so schreitet letztere längs einer geraden Linie ins Unendliche fort. Diese Gerade ist die α' Achse, auf welcher sich ein Punkt als Bewegungsmittelpunkt mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt. Ist auch $A_2 = 0$, so vereinfacht sich diese fortschreitende Bewegung dahin, dass der Schwerpunkt selbst das Centrum der Bewegung ist.

Die Untersuchung der Schwerpunktsbewegung ergab für die Koordinaten des festen Mittelpunkts im ersten Fall:

$$(35) \quad \begin{aligned} q_1 &= \frac{\lambda_1 d_1}{g_1} + \frac{\lambda_2 d_2}{g_2} + \frac{\lambda_3 d_3}{g_3}, \\ q_2 &= \frac{\mu_1 d_1}{g_1} + \frac{\mu_2 d_2}{g_2} + \frac{\mu_3 d_3}{g_3}, \\ q_3 &= \frac{\nu_1 d_1}{g_1} + \frac{\nu_2 d_2}{g_2} + \frac{\nu_3 d_3}{g_3}, \end{aligned}$$

für die des geradlinig fortschreitenden Mittelpunkts im zweiten Fall:

$$(36) \quad \begin{aligned} q'_1 &= \lambda_1 a_1 + \frac{\lambda_2 d_2}{g_2} + \frac{\lambda_3 d_3}{g_3} + \lambda_1 b_1 t, \\ q'_2 &= \mu_1 a_1 + \frac{\mu_2 d_2}{g_2} + \frac{\mu_3 d_3}{g_3} + \mu_1 b_1 t, \\ q'_3 &= \nu_1 a_1 + \frac{\nu_2 d_2}{g_2} + \frac{\nu_3 d_3}{g_3} + \nu_1 b_1 t, \end{aligned}$$

für die den Schwerpunkt enthaltende Ebene im dritten Fall die Gleichung:

$$(37) \quad Ax + By + Cz = \frac{D \sum m_{\kappa} n_{\kappa}}{M}.$$

Die Prüfung der aufgeführten Gleichungen führt zu dem Resultat, dass die Lage der durch sie repräsentierten Centralgebilde (Punkt, Gerade, Ebene) nicht von dem anfänglichen Bewegungszustand des Punktsystems, sondern nur von der Lage der Ebenen E_{κ} und der Verteilung der Massen auf dieselben abhängt. Wegen ihrer Wichtigkeit für die Bewegung des Systems wird es nicht überflüssig sein, die Lage dieser Centralgebilde und ihre Bedeutung in Bezug auf das gegebene Ebenen- und Massen-System näher zu untersuchen.

Definiert man eine Funktion V als die halbe Summe der Quadrate der Entfernungen eines beliebig im Raume gewählten Punktes (x, y, z) von sämtlichen Ebenen E_{κ} , jedes multipliziert mit der zugehörigen Masse m_{κ} , so ist

$$V = \frac{1}{2} \sum m_{\kappa} \left(\frac{D_{\kappa} - A_{\kappa}x - B_{\kappa}y - C_{\kappa}z}{Q_{\kappa}} \right)^2,$$

oder mit Benutzung der Abkürzungen (11)

$$(38) \quad \begin{aligned} 2V = & C_{11}x^2 + C_{22}y^2 + C_{33}z^2 + 2C_{12}xy + 2C_{13}xz + 2C_{23}yz \\ & - 2C_{14}x - 2C_{24}y - 2C_{34}z + C_{44}, \end{aligned}$$

wenn noch $\sum m_{\kappa} \frac{D^2 \kappa}{Q^2 \kappa} = C_{44}$ gesetzt wird.

Fragt man, für welchen Punkt oder für welche Punkte im Raume diese Funktion zum Minimum wird, so hat man die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

oder

$$(39) \quad \begin{aligned} C_{11}x + C_{12}y + C_{13}z &= C_{14} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{E}_1) \\ C_{12}x + C_{22}y + C_{23}z &= C_{24} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{E}_2) \\ C_{13}x + C_{23}y + C_{33}z &= C_{34} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{E}_3) \end{aligned}$$

aufzulösen. Diese Gleichungen repräsentieren drei Ebenen $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, die sich, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{vmatrix} = A_3 > 0$$

ist, d. h. im ersten der drei Hauptfälle, in einem Punkte schneiden müssen. Es lässt sich zeigen, dass die Koordinaten q_1 , q_2 , q_3 des Bewegungsmittelpunkts diesen Gleichungen genügen, d. h. dass letzterer mit dem Schnittpunkt jener drei Ebenen zusammenfällt. Die Addition der beziehungsweise mit

$$\text{a) } C_{11} \ C_{12} \ C_{13}, \quad \text{b) } C_{12} \ C_{22} \ C_{23}, \quad \text{c) } C_{13} \ C_{23} \ C_{33}$$

multiplizierten Gleichungen (35) ergibt nämlich mit Rücksicht auf (28):

$$\begin{aligned} C_{11}q_1 + C_{12}q_2 + C_{13}q_3 &= \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3, \\ C_{12}q_1 + C_{22}q_2 + C_{23}q_3 &= \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3, \\ C_{13}q_1 + C_{23}q_2 + C_{33}q_3 &= \nu_1 d_1 + \nu_2 d_2 + \nu_3 d_3. \end{aligned}$$

Substituiert man für d_1 , d_2 , d_3 die Werte (18), so folgt mit Benutzung des Systems (29):

$$\begin{aligned} C_{11}q_1 + C_{12}q_2 + C_{13}q_3 &= C_{14}, \\ C_{12}q_1 + C_{22}q_2 + C_{23}q_3 &= C_{24}, \\ C_{13}q_1 + C_{23}q_2 + C_{33}q_3 &= C_{34}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Durch Auflösung der Gleichungen (39) kann man demnach die Koordinaten des Bewegungscentrums direkt durch die Konstanten des gegebenen Ebenen- und Massen-Systems ausdrücken. Man findet

$$\begin{aligned}
 x = q_1 &= \frac{1}{A_3} \begin{vmatrix} C_{14} & C_{12} & C_{13} \\ C_{24} & C_{22} & C_{23} \\ C_{34} & C_{23} & C_{33} \end{vmatrix} = \frac{B_1}{A_3} \\
 y = q_2 &= \frac{1}{A_3} \begin{vmatrix} C_{11} & C_{14} & C_{13} \\ C_{12} & C_{24} & C_{23} \\ C_{13} & C_{34} & C_{33} \end{vmatrix} = \frac{B_2}{A_3} \\
 z = q_3 &= \frac{1}{A_3} \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{14} \\ C_{12} & C_{22} & C_{24} \\ C_{13} & C_{23} & C_{34} \end{vmatrix} = \frac{B_3}{A_3}.
 \end{aligned}$$

Durch Substitution der Werte (11) ergibt sich nach gehöriger Entwicklung, wie teilweise schon früher gefunden:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \sum \frac{m_\alpha m_\beta m_\gamma}{Q^2 \alpha Q^2 \beta Q^2 \gamma} \begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha & C_\alpha \\ A_\beta & B_\beta & C_\beta \\ A_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} D_\alpha & B_\alpha & C_\alpha \\ D_\beta & B_\beta & C_\beta \\ D_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \end{vmatrix} \\
 B_2 &= \sum \frac{m_\alpha m_\beta m_\gamma}{Q^2 \alpha Q^2 \beta Q^2 \gamma} \begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha & C_\alpha \\ A_\beta & B_\beta & C_\beta \\ A_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_\alpha & D_\alpha & C_\alpha \\ A_\beta & D_\beta & C_\beta \\ A_\gamma & D_\gamma & C_\gamma \end{vmatrix} \\
 B_3 &= \sum \frac{m_\alpha m_\beta m_\gamma}{Q^2 \alpha Q^2 \beta Q^2 \gamma} \begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha & C_\alpha \\ A_\beta & B_\beta & C_\beta \\ A_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha & D_\alpha \\ A_\beta & B_\beta & D_\beta \\ A_\gamma & B_\gamma & D_\gamma \end{vmatrix} \\
 A_3 &= \sum \frac{m_\alpha m_\beta m_\gamma}{Q^2 \alpha Q^2 \beta Q^2 \gamma} \begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha & C_\alpha \\ A_\beta & B_\beta & C_\beta \\ A_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \end{vmatrix}^2.
 \end{aligned}$$

Ist $A_3 = 0$, so verschwinden vorstehenden Werten zufolge gleichzeitig die Determinanten B_1, B_2, B_3 ; die Grössen q_1, q_2, q_3 erscheinen unter der Form $\frac{0}{0}$, die Ebenen $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ schneiden sich also in einer gemeinsamen Geraden. Diese Gerade ist mit der α' Achse, der Bahn des Bewegungscentrums im zweiten Fall, identisch. Verfährt man nämlich mit den Gleichungen (36) ebenso wie mit (35), so kommt man nach ganz analoger Rechnung zu:

$$\begin{aligned}
 C_{11}q'_1 + C_{12}q'_2 + C_{13}q'_3 &= C_{14}, \\
 C_{12}q'_1 + C_{22}q'_2 + C_{23}q'_3 &= C_{24}, \\
 C_{13}q'_1 + C_{23}q'_2 + C_{33}q'_3 &= C_{34}.
 \end{aligned}$$

Dass die Centralgerade sämtlichen Ebenen $\mathbf{E}_\kappa$ parallel ist, ergibt sich durch folgende Betrachtung. Bezeichnet man die Gleichungen dieser Ebenen zur Abkürzung durch

$$E_1 = 0, \quad E_2 = 0 \dots, \quad E_\kappa = 0 \dots,$$

so lassen sich die Gleichungen (39) in folgender Form schreiben:

$$m_1 \frac{A_1}{Q^2_1} E_1 + m_2 \frac{A_2}{Q^2_2} E_2 + \dots + m_\kappa \frac{A_\kappa}{Q^2_\kappa} E_\kappa + \dots = 0,$$

$$m_1 \frac{B_1}{Q^2_1} E_1 + m_2 \frac{B_2}{Q^2_2} E_2 + \dots + m_n \frac{B_n}{Q^2_n} E_n + \dots = 0,$$

$$m_1 \frac{C_1}{Q^2_1} E_1 + m_2 \frac{C_2}{Q^2_2} E_2 + \dots + m_n \frac{C_n}{Q^2_n} E_n + \dots = 0.$$

Da nun unter der Voraussetzung, dass die Ebenen E_n parallele Schnittlinien haben, alle Ebenen, deren Gleichungen von der Form

$$p_1 E_1 + p_2 E_2 + \dots + p_n E_n + \dots = 0$$

sind, sich in — den genannten Schnittlinien parallelen — Geraden schneiden, so folgt durch Anwendung dieses Satzes auf die Ebenen E_1, E_2, E_3 die vorstehende Behauptung.

Ist endlich $A_2 = 0$, so fällt, wie leicht mit Hilfe der Werte (33) nachzuweisen, jede der Ebenen E_1, E_2, E_3 mit der Centralebene (37), in welcher die Bewegung des Schwerpunkts stattfindet, zusammen.

Das den Mittelpunkt der Bewegung enthaltende Centralgebilde ist hiernach zu definieren als der Punkt, resp. als der geometrische Ort der Punkte, für welche die oben erklärte Funktion V ihren kleinsten Wert besitzt, und wird in jedem Fall — sei es Punkt, Gerade oder Ebene — durch die Ebenen E_1, E_2, E_3 eindeutig bestimmt.

Die Funktion V giebt auch über die Geschwindigkeitsverhältnisse des Schwerpunkts näheren Aufschluss, wenn man für x, y, z die Koordinaten α, β, γ setzt. Die Ableitungen

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = C_{11}\alpha + C_{12}\beta + C_{13}\gamma - C_{14},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = C_{12}\alpha + C_{22}\beta + C_{23}\gamma - C_{24},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma} = C_{13}\alpha + C_{23}\beta + C_{33}\gamma - C_{34}$$

ergeben durch Kombination mit den Differentialgleichungen (12) der Schwerpunktsbewegung:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\varrho \frac{\partial V}{\partial \alpha},$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\varrho \frac{\partial V}{\partial \beta},$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\varrho \frac{\partial V}{\partial \gamma}.$$

Ist die Geschwindigkeit des Schwerpunkts v zur Zeit $t=0$ v_0 und hat V für die Anfangslage des Schwerpunkts den Wert V_0 , so leitet man hieraus in bekannter Weise ab:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\varrho(V - V_0)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass, wenn der Schwerpunkt das Centralgebilde des Punktsystems passiert, er dann jedenfalls seine grösste Geschwindigkeit besitzt. Die Geschwindigkeit nimmt

ab, wenn die Funktion V zunimmt, und ist für alle die Punkte der Schwerpunktsbahn dieselbe, für welche V denselben Wert hat. Diese Punkte liegen, wie die Gleichung (38) zeigt, auf einer Fläche zweiter Ordnung, die somit als die Niveaufläche der Funktion V anzusehen ist. Über die Natur dieser Fläche lehrt die Theorie der Flächen zweiter Ordnung folgendes:

Sie ist im Allgemeinen, d. h. für $A_3 > 0$, da den Werten (23) zufolge ausser der Determinante

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{vmatrix} = A_3$$

jede der Differenzen

$$C_{11}C_{22} - C_{12}^2, \quad C_{11}C_{33} - C_{13}^2, \quad C_{22}C_{33} - C_{23}^2$$

positiv ist, ein Ellipsoid; ihr Mittelpunkt, dessen Koordinaten den Gleichungen (39) genügen müssen, das Bewegungscentrum. Die Konstanten $\lambda_1, \mu_1, \nu_1 \dots$ bedeuten in Bezug auf die Fläche die Cosinus der Winkel, die die drei Achsen derselben mit denen des primitiven Koordinatensystems bilden. Daher fallen die Achsen des sekundären Systems — mit Rücksicht auf (26) — mit denen des Ellipsoides zusammen. Für $\vartheta_1 = \vartheta_2$ ist die Niveaufläche ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse die γ' Achse ist, für $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3$ eine Kugel. Ist $A_3 = 0$, so verschwinden, wie schon bekannt, gleichzeitig die Determinanten B_1, B_2, B_3 ; die Fläche ist daher ein elliptischer Cylinder, dessen Achse die Bahn des Bewegungsmittelpunkts ist. Sie zerfällt schliesslich für $A_2 = 0$ in zwei zu beiden Seiten der Centralebene liegende, gleich weit von ihr entfernte parallele Ebenen.

B. Bewegung der Masse m .

Mit Hilfe der gefundenen Gleichungen der Schwerpunktsbewegung sind die Differentialgleichungen (10) der relativen Bewegung des Punktes m integrierbar. Zur Abkürzung mögen im folgenden die als Zeitfunktionen durch (24) erklärten Grössen α', β', γ' in der Rechnung beibehalten werden.

$$1. A_3 > 0.$$

Mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha &= q_1 + \lambda_1 \alpha' + \lambda_2 \beta' + \lambda_3 \gamma', \\ \beta &= q_2 + \mu_1 \alpha' + \mu_2 \beta' + \mu_3 \gamma', \\ \gamma &= q_3 + \nu_1 \alpha' + \nu_2 \beta' + \nu_3 \gamma' \end{aligned}$$

und der mit Rücksicht auf (24) hieraus leicht herzuleitenden Relationen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= -\lambda_1 \vartheta_1 \alpha' - \lambda_2 \vartheta_2 \beta' - \lambda_3 \vartheta_3 \gamma', \\ \frac{d^2 \beta}{dt^2} &= -\mu_1 \vartheta_1 \alpha' - \mu_2 \vartheta_2 \beta' - \mu_3 \vartheta_3 \gamma', \\ \frac{d^2 \gamma}{dt^2} &= -\nu_1 \vartheta_1 \alpha' - \nu_2 \vartheta_2 \beta' - \nu_3 \vartheta_3 \gamma' \end{aligned}$$

verwandeln sich die Gleichungen (10) in:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{A}{Q} \omega^2 h + (\lambda_1 \omega^2 - \frac{A}{Q} \omega^2 e_1) \alpha' + (\lambda_2 \omega^2 - \frac{A}{Q} \omega^2 e_2) \beta' + (\lambda_3 \omega^2 - \frac{A}{Q} \omega^2 e_3) \gamma' - \omega^2 \xi, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{B}{Q} \omega^2 h + (\mu_1 \omega^2 - \frac{B}{Q} \omega^2 e_1) \alpha' + (\mu_2 \omega^2 - \frac{B}{Q} \omega^2 e_2) \beta' + (\mu_3 \omega^2 - \frac{B}{Q} \omega^2 e_3) \gamma' - \omega^2 \eta, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \frac{C}{Q} \omega^2 h + (\nu_1 \omega^2 - \frac{C}{Q} \omega^2 e_1) \alpha' + (\nu_2 \omega^2 - \frac{C}{Q} \omega^2 e_2) \beta' + (\nu_3 \omega^2 - \frac{C}{Q} \omega^2 e_3) \gamma' - \omega^2 \zeta,\end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned}h &= \frac{D - Aq_1 - Bq_2 - Cq_3}{Q}, \\ e_1 &= \lambda_1 \frac{A}{Q} + \mu_1 \frac{B}{Q} + \nu_1 \frac{C}{Q}, \\ e_2 &= \lambda_2 \frac{A}{Q} + \mu_2 \frac{B}{Q} + \nu_2 \frac{C}{Q}, \\ e_3 &= \lambda_3 \frac{A}{Q} + \mu_3 \frac{B}{Q} + \nu_3 \frac{C}{Q}\end{aligned}$$

zu setzen ist. Aus der Bedeutung der Grössen $q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \mu_1, \nu_1 \dots$ erhellt, dass h die Länge des vom Bewegungscentrum auf die Ebene E gefällten Lotes und e_1, e_2, e_3 die Cosinus der von letzterem mit den Achsen des $(\alpha', \beta', \gamma')$ Systems gebildeten Winkel sind.

Die Integration obiger Differentialgleichungen ergibt, wenn $F_1, G_1, F_2, G_2, F_3, G_3$ die Integrationskonstanten sind, nach gehöriger Reduktion:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{A}{Q} h + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_1^2} (\lambda_1 \frac{\omega_1^2}{\omega^2} - \frac{A}{Q} e_1) \alpha' + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2} (\lambda_2 \frac{\omega_2^2}{\omega^2} - \frac{A}{Q} e_2) \beta' \\ &\quad + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_3^2} (\lambda_3 \frac{\omega_3^2}{\omega^2} - \frac{A}{Q} e_3) \gamma' + F_1 \cos \omega t + G_1 \sin \omega t, \\ \eta &= \frac{B}{Q} h + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_1^2} (\mu_1 \frac{\omega_1^2}{\omega^2} - \frac{B}{Q} e_1) \alpha' + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2} (\mu_2 \frac{\omega_2^2}{\omega^2} - \frac{B}{Q} e_2) \beta' \\ &\quad + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_3^2} (\mu_3 \frac{\omega_3^2}{\omega^2} - \frac{B}{Q} e_3) \gamma' + F_2 \cos \omega t + G_2 \sin \omega t, \\ \zeta &= \frac{C}{Q} h + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_1^2} (\nu_1 \frac{\omega_1^2}{\omega^2} - \frac{C}{Q} e_1) \alpha' + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2} (\nu_2 \frac{\omega_2^2}{\omega^2} - \frac{C}{Q} e_2) \beta' \\ &\quad + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_3^2} (\nu_3 \frac{\omega_3^2}{\omega^2} - \frac{C}{Q} e_3) \gamma' + F_3 \cos \omega t + G_3 \sin \omega t.\end{aligned}$$

Durch Addition der Gleichungen der Schwerpunktsbewegung zu den vorstehenden erhält man folgende Gleichungen der absoluten Bewegung des Punktes m in der Ebene E :

$$\begin{aligned}(40) \quad x &= q_1 + \frac{A}{Q} h + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_1^2} (\lambda_1 - \frac{A}{Q} e_1) \alpha' + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2} (\lambda_2 - \frac{A}{Q} e_2) \beta' \\ &\quad + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_3^2} (\lambda_3 - \frac{A}{Q} e_3) \gamma' + F_1 \cos \omega t + G_1 \sin \omega t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (40) \quad y &= q_2 + \frac{B}{Q} h + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_1^2} (\mu_1 - \frac{B}{Q} e_1) \alpha' + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2} (\mu_2 - \frac{B}{Q} e_2) \beta' \\
 &\quad + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_3^2} (\mu_3 - \frac{B}{Q} e_3) \gamma' + F_2 \cos \omega t + G_2 \sin \omega t, \\
 z &= q_3 + \frac{C}{Q} h + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_1^2} (\nu_1 - \frac{C}{Q} e_1) \alpha' + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2} (\nu_2 - \frac{C}{Q} e_2) \beta' \\
 &\quad + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_3^2} (\nu_3 - \frac{C}{Q} e_3) \gamma' + F_3 \cos \omega t + G_3 \sin \omega t.
 \end{aligned}$$

Differentiiert man dieselben zur Bestimmung der Konstanten nach t und setzt in den ursprünglichen wie in den abgeleiteten Gleichungen $t=0$, so findet man:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= x_0 - q_1 - \frac{A}{Q} h - \frac{\omega^2 a_1}{\omega^2 - \omega_1^2} (\lambda_1 - \frac{A}{Q} e_1) - \frac{\omega^2 a_2}{\omega^2 - \omega_2^2} (\lambda_2 - \frac{A}{Q} e_2) - \frac{\omega^2 a_3}{\omega^2 - \omega_3^2} (\lambda_3 - \frac{A}{Q} e_3), \\
 F_2 &= y_0 - q_2 - \frac{B}{Q} h - \frac{\omega^2 a_1}{\omega^2 - \omega_1^2} (\mu_1 - \frac{B}{Q} e_1) - \frac{\omega^2 a_2}{\omega^2 - \omega_2^2} (\mu_2 - \frac{B}{Q} e_2) - \frac{\omega^2 a_3}{\omega^2 - \omega_3^2} (\mu_3 - \frac{B}{Q} e_3), \\
 F_3 &= z_0 - q_3 - \frac{C}{Q} h - \frac{\omega^2 a_1}{\omega^2 - \omega_1^2} (\nu_1 - \frac{C}{Q} e_1) - \frac{\omega^2 a_2}{\omega^2 - \omega_2^2} (\nu_2 - \frac{C}{Q} e_2) - \frac{\omega^2 a_3}{\omega^2 - \omega_3^2} (\nu_3 - \frac{C}{Q} e_3), \\
 G_1 &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 - \frac{\omega \omega_1 b_1}{\omega^2 - \omega_1^2} (\lambda_1 - \frac{A}{Q} e_1) - \frac{\omega \omega_2 b_2}{\omega^2 - \omega_2^2} (\lambda_2 - \frac{A}{Q} e_2) - \frac{\omega \omega_3 b_3}{\omega^2 - \omega_3^2} (\lambda_3 - \frac{A}{Q} e_3), \\
 G_2 &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 - \frac{\omega \omega_1 b_1}{\omega^2 - \omega_1^2} (\mu_1 - \frac{B}{Q} e_1) - \frac{\omega \omega_2 b_2}{\omega^2 - \omega_2^2} (\mu_2 - \frac{B}{Q} e_2) - \frac{\omega \omega_3 b_3}{\omega^2 - \omega_3^2} (\mu_3 - \frac{B}{Q} e_3), \\
 G_3 &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{dz}{dt} \right)_0 - \frac{\omega \omega_1 b_1}{\omega^2 - \omega_1^2} (\nu_1 - \frac{C}{Q} e_1) - \frac{\omega \omega_2 b_2}{\omega^2 - \omega_2^2} (\nu_2 - \frac{C}{Q} e_2) - \frac{\omega \omega_3 b_3}{\omega^2 - \omega_3^2} (\nu_3 - \frac{C}{Q} e_3).
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (40) lassen erkennen, dass die Bewegung der Masse m um den durch die Koordinaten

$$q_1 + \frac{A}{Q} h, \quad q_2 + \frac{B}{Q} h, \quad q_3 + \frac{C}{Q} h$$

bestimmten Punkt stattfindet. Dies ist — der Bedeutung der Grössen q_1, q_2, q_3, h zufolge — der Fusspunkt des vom Bewegungscentrum des Systems auf die Ebene E gefällten Lotes. Derselbe ist also der Mittelpunkt für die Bewegung der Masse m in ihrer Ebene.

Zur näheren Untersuchung der Bewegung denken wir uns den Anfangspunkt des (x, y, z) Systems in diesen Mittelpunkt verlegt, sodann die (x, y) Ebene durch successive positive Drehung des Systems um die z - und x -Achse in die Ebene E verlegt und betrachten die x - und y -Achse in ihrer jetzigen Lage als die x' - resp. y' -Achse eines neuen, ebenen Koordinatensystems. Diese Umlegung vermitteln die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 x &= q_1 + \frac{A}{Q} h - \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} x' - \frac{AC}{\sqrt{A^2 + B^2}} y', \\
 y &= q_2 + \frac{B}{Q} h + \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x' - \frac{BC}{Q \sqrt{A^2 + B^2}} y', \\
 z &= q_3 + \frac{C}{Q} h + \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{Q} y',
 \end{aligned}$$

vermöge deren man nach gehöriger Reduktion aus (40) erhält:

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_1^2} \cdot \frac{\mu_1 A - \lambda_1 B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \alpha' + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2} \cdot \frac{\mu_2 A - \lambda_2 B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \beta' \\
 &+ \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_3^2} \cdot \frac{\mu_3 A - \lambda_3 B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \gamma' + \frac{AF_2 - BF_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{AG_2 - BG_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t, \\
 y' &= \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_1^2} \cdot \frac{\nu_1 Q - e_1 C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \alpha' + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2} \cdot \frac{\nu_2 Q - e_2 C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \beta' \\
 &+ \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_3^2} \cdot \frac{\nu_3 Q - e_3 C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \gamma' + \frac{QF_3}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{QG_3}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t.
 \end{aligned}$$

Die Bewegung des Punktes m ist hiernach eine vierfach zusammengesetzte. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned}
 \text{I} \quad & \begin{cases} x'_I = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_1^2} \cdot \frac{\mu_1 A - \lambda_1 B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \alpha' \\ y'_I = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_1^2} \cdot \frac{\nu_1 Q - e_1 C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \alpha' \end{cases} \\
 \text{II} \quad & \begin{cases} x'_{II} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2} \cdot \frac{\mu_2 A - \lambda_2 B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \beta' \\ y'_{II} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2} \cdot \frac{\nu_2 Q - e_2 C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \beta' \end{cases} \\
 \text{III} \quad & \begin{cases} x'_{III} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_3^2} \cdot \frac{\mu_3 A - \lambda_3 B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \gamma' \\ y'_{III} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_3^2} \cdot \frac{\nu_3 Q - e_3 C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \gamma' \end{cases} \\
 \text{IV} \quad & \begin{cases} x'_{IV} = \frac{AF_2 - BF_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{AG_2 - BG_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t \\ y'_{IV} = \frac{QF_3}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{QG_3}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t, \end{cases}
 \end{aligned}$$

so ist offenbar

$$\begin{aligned}
 x' &= x'_I + x'_{II} + x'_{III} + x'_{IV}, \\
 y' &= y'_I + y'_{II} + y'_{III} + y'_{IV}.
 \end{aligned}$$

Von diesen vier Gleichungspaaren drücken — jedes für sich betrachtet — I, II, III einfache geradlinige Schwingungen, IV eine elliptische Bewegung eines Punktes aus. Bewegen sich also gleichzeitig in der Ebene E

ein Punkt P_I um den neuen Anfangspunkt nach dem Gesetz I,

ein Punkt P_{II} um P_I nach dem Gesetz II,

ein Punkt P_{III} um P_{II} nach dem Gesetz III,

ein Punkt P_{IV} um P_{III} nach dem Gesetz IV,

so führt P_{IV} die Bewegung der Masse m aus.

Ist $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2 = r$, d. i. $\omega_1 = \omega_2$, so vereinfacht sich die Bewegung insofern, als die beiden geradlinigen Partialbewegungen I und II sich in eine elliptische Bewegung zusammenfassen lassen.

Sind alle drei Wurzeln der kubischen Gleichung einander gleich, so erhält man mit Benutzung der Gleichungen (31):

$$x = q_1 + \frac{A}{Q} h + \frac{3}{2} \left(a_1 - \frac{A}{Q} g_1 \right) \cos \frac{\omega}{\sqrt{3}} t + \frac{3}{2} \left(b_1 - \frac{A}{Q} g_2 \right) \sin \frac{\omega}{\sqrt{3}} t + F_1 \cos \omega t + G_1 \sin \omega t,$$

$$y = q_2 + \frac{B}{Q} h + \frac{3}{2} \left(a_2 - \frac{B}{Q} g_1 \right) \cos \frac{\omega}{\sqrt{3}} t + \frac{3}{2} \left(b_2 - \frac{B}{Q} g_2 \right) \sin \frac{\omega}{\sqrt{3}} t + F_2 \cos \omega t + G_2 \sin \omega t,$$

$$z = q_3 + \frac{C}{Q} h + \frac{3}{2} \left(a_3 - \frac{C}{Q} g_1 \right) \cos \frac{\omega}{\sqrt{3}} t + \frac{3}{2} \left(b_3 - \frac{C}{Q} g_2 \right) \sin \frac{\omega}{\sqrt{3}} t + F_3 \cos \omega t + G_3 \sin \omega t,$$

worin

$$g_1 = \frac{A}{Q} a_1 + \frac{B}{Q} a_2 + \frac{C}{Q} a_3,$$

$$g_2 = \frac{A}{Q} b_1 + \frac{B}{Q} b_2 + \frac{C}{Q} b_3$$

zu setzen, die Integrationskonstanten in bekannter Weise (pag. 29) leicht zu bestimmen sind. Die Bewegung der Masse m lässt sich mittels zweier elliptischer Partialbewegungen geometrisch deuten.

$$2. A_2 > 0, A_3 = 0.$$

Die Rechnung ist der für $A_3 > 0$ durchgeführten ganz analog. Ist h der Abstand der Centralgeraden von der Ebene E , so ergeben sich aus (10) mit Benutzung von (32) folgende Bewegungsgleichungen:

$$x = q'_1 + \frac{A}{Q} h + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2} \left(\lambda_2 - \frac{A}{Q} e_2 \right) \beta' + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_3^2} \left(\lambda_3 - \frac{A}{Q} e_3 \right) \gamma' + F_1 \cos \omega t + G_1 \sin \omega t,$$

$$y = q'_2 + \frac{B}{Q} h + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2} \left(\mu_2 - \frac{B}{Q} e_2 \right) \beta' + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_3^2} \left(\mu_3 - \frac{B}{Q} e_3 \right) \gamma' + F_2 \cos \omega t + G_2 \sin \omega t,$$

$$z = q'_3 + \frac{C}{Q} h + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_3^2} \left(\nu_2 - \frac{C}{Q} e_2 \right) \beta' + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_3^2} \left(\nu_3 - \frac{C}{Q} e_3 \right) \gamma' + F_3 \cos \omega t + G_3 \sin \omega t.$$

In ihnen liegt ausgesprochen, dass der Massenpunkt m um den durch die Koordinaten

$$q'_1 + \frac{A}{Q} h, \quad q'_2 + \frac{B}{Q} h, \quad q'_3 + \frac{C}{Q} h$$

bestimmten Fusspunkt des vom Bewegungscentrum des Systems auf die Ebene E gefällten Lotes eine schwingende Bewegung ausführt, die aus zwei geradlinigen Schwingungen und einer elliptischen einfachen Schwingung zusammengesetzt ist, seine Bahn ist mithin eine längs der Projektion der Centralgeraden auf die Ebene E gleichförmig ins Unendliche fortschreitende.

3. $A_2 = 0$.

Im Anschluss an (34) ergeben sich, wenn der Abstand der Centralebene von E ,

$$\frac{D}{Q} \left(1 - \frac{\sum m_k n_k}{M}\right),$$

wieder mit h bezeichnet wird, die Gleichungen:

$$x = \alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 t + \frac{A}{Q} h + F_1 \cos \omega t + G_1 \sin \omega t,$$

$$y = \beta_0 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0 t + \frac{B}{Q} h + F_2 \cos \omega t + G_2 \sin \omega t,$$

$$z = \gamma_0 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_0 t + \frac{C}{Q} h + F_3 \cos \omega t + G_3 \sin \omega t.$$

Die Masse m beschreibt also eine längs der Projektion der Schwerpunktsbahn auf die Ebene E fortschreitende elliptische Wellenlinie.